

平方根の求め方（開平）の原理

626.5009 の正の平方根 25.03 を求めてみよう。

$\sqrt{626.5009}$ を超えない $\sqrt{626.5009}$ の近似値を $a \times 10 + b + c \times 10^{-1} + d \times 10^{-2}$
 (a, b, c, d は $0 < a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$ を満たす整数) とすると、

$$(a \times 10 + b + c \times 10^{-1} + d \times 10^{-2} + e \times 10^{-3})^2 \text{ は}$$

626.5009 の近似値かつ 626.5009 以下の数である。

わかりやすさの目的で、 $(a \times 10 + b + c \times 10^{-1} + d \times 10^{-2} + e \times 10^{-3})^2$ を下表のように展開し、
 整数 a, b, c, d, e の順に値を求めていく。

	$a \times 10$	b	$c \times 10^{-1}$	$d \times 10^{-2}$
$a \times 10$	$a^2 \times 10^2$	$ab \times 10$	ac	$ad \times 10^{-1}$
b	$ab \times 10$	b^2	$bc \times 10^{-1}$	$bd \times 10^{-2}$
$c \times 10^{-1}$	ac	$bc \times 10^{-1}$	$c^2 \times 10^{-2}$	$cd \times 10^{-3}$
$d \times 10^{-2}$	$ad \times 10^{-1}$	$bd \times 10^{-2}$	$cd \times 10^{-3}$	$d^2 \times 10^{-4}$

a の値を求める。

赤色の部分 $a^2 \times 10^2$ が 626.5009 を超えない最大値をとるためには、 $a = 2$ であればよい。

b の値を求める。

626.5009 から $a^2 \times 10^2$ を除いた数は、 $a = 2$ より、 $626.5009 - 2^2 \times 10^2 = 226.5009$

よって、橙色の部分の総和

$$\begin{aligned} 2ab \times 10 + b^2 &= 2 \cdot 2b \times 10 + b^2 \\ &= 40b + b^2 \\ &= b(40 + b) \end{aligned}$$

が、226.5009 を超えない最大値をとるためには、 $b = 5$ であればよい。

c の値を求める。

226.5009 から $2ab \times 10 + b^2 = b(b + 40)$ を除いた数は、 $b = 5$ より、 $226.5009 - 5 \times 45 = 1.5009$

よって、黄色の部分の総和

$$\begin{aligned} 2ac + 2bc \times 10^{-1} + c^2 \times 10^{-2} &= 2 \cdot 2c + 2 \cdot 5c \times 10^{-1} + c^2 \times 10^{-2} \\ &= 5c + c^2 \times 10^{-2} \\ &= \frac{c(500 + c)}{100} \end{aligned}$$

が、1.5009 を超えない最大値をとるためには、 $c = 0$ であればよい。

d の値を求める。

1.5009 が保留されたので、

緑色の部分の総和

$$\begin{aligned}2ad \times 10^{-1} + 2bd \times 10^{-2} + 2cd \times 10^{-3} + d^2 \times 10^{-4} \\&= 2 \cdot 2 \cdot d \times 10^{-1} + 2 \cdot 5 \cdot d \times 10^{-2} + 2 \cdot 0 \cdot d \times 10^{-3} + d^2 \times 10^{-4} \\&= 5d \times 10^{-1} + d^2 \times 10^{-4} \\&= \frac{d(5000 + d)}{10000}\end{aligned}$$

が、1.5009 を超えない最大値をとるためには、 $d = 3$ であればよく、

このとき $\frac{d(5000 + d)}{10000} = 1.5009$ となる。

以上より、

$$\begin{aligned}\sqrt{626.5009} &= 2 \times 10 + 5 + 0 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} \\&= 25.03\end{aligned}$$